

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 10 FEBRUARIE 2024

Clasa a V-a / BAREM

Problema 1.

- a) Vârstele părinților lui Denis se exprimă prin două numere naturale pare consecutive al căror produs este 2024. Vârsta mamei poate fi 42 de ani? Justificați răspunsul.
- b) Determinați vârsta lui Denis știind că aceasta se obține calculând suma cifrelor numerelor ce reprezintă vârstele părinților săi, care îndeplinesc condițiile punctului a).
- c) Seara, părinții au mers cu Denis la restaurant. Au mâncat același fel principal și fiind foarte gustos, Denis și tatăl lui au luat câte două porții. Fiind că este o zi specială, tatăl a comandat o sticlă de șampanie și două felii de tort, pentru Denis și mama sa. Nota de plată a fost 255 de lei. Știind că prețurile produselor sunt reprezentate de numere naturale diferite, divizibile cu 15 și că prețul feliei de tort este cel mai mic, determinați numerele naturale ce reprezintă prețul fiecărui produs comandat.

Soluție:

- a) 2024 nu este divizibil cu 3, deci nu este divizibil cu 422p
- b) vârsta mamei este 44 de ani și vârsta tatălui 46 de ani.1p
- Denis are 18 ani1p
- c) cinci porții de mâncare, două porții de tort și o șampanie costă 255 lei. Deoarece tortul este cel mai ieftin, prețul feliei poate fi 15 lei.1p
- Cum prețurile sunt distincte, prețul felului principal poate fi cel puțin 30 de lei. Dacă este 30 lei, pretul șampaniei este 75 lei.1p
- Dacă prețul felului principal ar fi 45 lei atunci tortul și șampania ar costa împreună 30 de lei ceea ce este imposibil.1p

Problema 2.

- a) Suma a trei numere naturale este $S = 2^{99} \cdot 5 + 5^{48}$. Aflați numerele știind că primul număr este egal cu jumătatea celui de-al doilea, iar al treilea este cu 25^{24} mai mare decât al doilea.
- b) Dacă $S = 2^{99} \cdot 5 + 5^{48}$ atunci stabiliți dacă afirmația :
”numărul $N = S + 2^{2024} + 9^{2024}$ este pătrat perfect” este adevărată.

Soluție:

- a) Primul număr este: 2^{99} 1p
- Al doilea număr este: 2^{100} 1p
- Al treilea număr este $2^{100} + 25^{24}$ 1p
- b) Ultima cifră a sumei S este 51p
- Ultima cifră a lui 2^{2024} este 61p
- Ultima cifră a 9^{2024} este 11p
- Ultima cifră a numărului N este 2, deci afirmația dată este falsă.1p

Problema 3.

- a) Împărțind 2024 la un număr natural nenul obținem câtul un pătrat perfect și restul egal cu cubul câtului. Determinați împărțitorul știind că restul nu este egal cu câtul.
b) Determinați toate numerele naturale nenule care împărțite la 2024, dau câtul un pătrat perfect și restul egal cu cubul câtului.

Soluție:

- a) Restul nu este egal cu câtul deci nu poate fi 1.1p
câtul divide 2024 și este un pătrat perfect, deci câtul este 41p
împărțitorul este 4901p

b) Notând cu a un astfel de număr, folosind teorema împărțirii cu rest și enunțul problemei, se obține relația:

$$a = 2024 \cdot x^2 + (x^2)^3, \text{ unde } x \text{ este un număr natural nenul}$$

$$a = 2024 \cdot x^2 + x^6, \text{ unde } x^6 < 2024 \quad (1) \quad \dots\dots\dots 1p$$

Ținând cont că $a \neq 0$, numerele x care verifică inegalitatea (1) sunt: 1, 2 și 3. 2p
Pentru aceste valori se obțin, respectiv, următoarele numere:

$$2024 \cdot 1^2 + 1^6 = 2025$$

$$2024 \cdot 2^2 + 2^6 = 8096 + 64 = 8160$$

$$2024 \cdot 3^2 + 3^6 = 18216 + 729 = 18945 \quad \dots\dots\dots 1p$$

Problema 4. Aflați numărul natural \overline{abcd} pentru care are loc relația: $\overline{abcd} + 3 \cdot \overline{abc} - 2023 = 0$.
G.M. nr. 9 / 2023

Soluție:

$$\overline{abcd} + 3 \cdot \overline{abc} - 2023 = 0 \Rightarrow \overline{abcd} + 3 \cdot \overline{abc} = 2023 \Rightarrow \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abc} \cdot 10 + d + 3 \cdot \overline{abc} = 2023 \Rightarrow 10\overline{abc} + d + 3\overline{abc} = 2023 \Rightarrow \dots\dots\dots 2p$$

$$13\overline{abc} + d = 2023 \dots\dots\dots 1p$$

$2023 = 13\overline{abc} + d \Rightarrow$ împărțind nr. 2023 la 13 se obțin câtul \overline{abc} și restul d
.....1p

$$\text{Cum } 2023 : 13 = 155 \text{ rest } 8 \Rightarrow \overline{abc} = 155 \text{ și } d = 8 \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\overline{abcd} = 1558 \dots\dots\dots 1p$$

